

MATEMATIKA

OBSAH:

1	ZÁKLADNÍ POZNATKY Z MATEMATICKÉ LOGIKY A TEORIE MNOŽIN	1
2	MATEMATICKÉ DŮKAZY	3
3	MOCNINY A ODMOCNINY, MOCNINNÉ FUNKCE	4
4	ÚPRAVY ALGEBRAICKÝCH VÝRAZŮ	5
5	FUNKCE A JEJICH ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI	6
6	LINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FUNKCE	6
7	LINEÁRNÍ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU	7
8	KVADRATICKÉ ROVNICE A NEROVNICE	8
9	VZTAHY MEZI KOŘENY A KOEFICIENTY KVADRATICKÉ ROVNICE	9
10	IRACIONÁLNÍ ROVNICE	9
11	KOMPLEXNÍ ČÍSLA	10
12	ŘEŠENÍ ROVNIC V OBORU KOMPLEXNÍCH ČÍSEL	10
13	ROVNICE S PARAMETREM	11
14	SOUSTAVY ROVNIC A NEROVNIC	12
15	EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÉ FUNKCE	13
16	EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE A NEROVNICE	14
17	LOGARITMICKÉ ROVNICE A NEROVNICE	14
18	GONIOMETRICKÉ FUNKCE	15
19	VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI	17
20	GONIOMETRICKÉ ROVNICE A NEROVNICE	18
21	TRIGONOMETRIE	18
22	SHODNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ	19
23	PODOBNOTA A STEJNOLEHLOST	19
24	PYTHAGOROVA VĚTA, EUKLIDOVY VĚTY	20
25	ROVINNÉ ÚTVARY	21
26	NEROTAČNÍ TĚLESA	21
27	ROTAČNÍ TĚLESA	22
28	MATICE A DETERMINANTY	23
29	LINEÁRNÍ ALGEBRA	23
30	VEKTORY	25
31	ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ V ROVINĚ	26
32	ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ V PROSTORU	27
33	POLOHOVÉ A METRICKÉ VZTAHY ÚTVARŮ V ROVINĚ	27
34	POLOHOVÉ A METRICKÉ VLASTNOSTI ÚTVARŮ V PROSTORU	28
35	ANALYTICKÁ GEOMETRIE KRUŽNICE A ELIPSY	29
36	ANALYTICKÁ GEOMETRIE PARABOLY	30
37	ANALYTICKÁ GEOMETRIE HYPERBOLY	30
38	VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMKY A KUŽELOSEČKY	31
39	VARIACE A PERMUTACE	31
40	KOMBINACE	32
41	ZÁKLADY PRAVDĚPODOBNOTI	33
42	ZÁKLADY STATISTIKY	34
43	ARITMETICKÁ POSLOUPNOST	35
44	GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST	35
45	ŘADY	36
46	LIMITA, SPOJITOST A DERIVACE FUNKCE	36
47	GEOMETRICKÝ A FYZIKÁLNÍ VÝZNAM DERIVACE	38
48	VYŠETŘOVÁNÍ PRŮBĚHU FUNKCE	38
49	PRIMITIVNÍ FUNKCE, URČITÝ INTEGRÁL	41
50	UŽITÍ INTEGRÁLNÍHO POČTU K VÝPOČTU OBSAHŮ ROVINNÝCH OBRAZCŮ A OBJEMŮ ROTAČNÍCH TĚLES	44

1 ZÁKLADNÍ POZNATKY Z MATEMATICKÉ LOGIKY A TEORIE MNOŽIN

Výrok (p): Každé sdělení, o kterém můžeme rozhodnout, zda je či není pravdivé. Je-li výrok pravdivý, přiřazujeme mu 1. Není-li pravdivý, přiřazujeme mu 0.

Negace výroku (p'): tvoříme ji pomocí „není pravda, že“ nebo „neplatí, že“.

1.1 LOGICKÉ SPOJKY

Konjunkce ($p \wedge q$): „a“, „i“, „a zároveň“ – je pravdivá, když jsou pravdivé oba výroky

Disjunkce (alternativa) ($p \vee q$): „nebo“ – je pravdivá, je-li pravdivý alespoň 1 výrok

Implikace ($p \Rightarrow q$): „jestliže ..., pak“ – není pravdivá jen tehdy, vyplývá-li z pravdy nepravda

Ekvivalence (oboustranná implikace) ($p \Leftrightarrow q$): „...právě tehdy, když ...“ – je pravdivá, mají-li oba výroky stejnou pravdivostní hodnotu

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

1.2 KVANTIFIKOVANÉ VÝROKY

Obecný kvantifikátor (\forall): „V každém...“, „Pro každé...“ – např.

$$\forall x \in R; (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Existenční kvantifikátor (\exists): „Existuje...“ – např. $\exists x \in R; x < 0$

1.3 DEFINICE, VĚTY

Definice: zavádí základní matematické pojmy

Věty: musíme je na rozdíl od definic dokázat. Skládají se z **předpokladu** a **tvrzení**. Např.

$\forall a \in Z^+; a = \text{liché č.} \Rightarrow a^2 = \text{liché č.}$ – předpoklad: celé kladné liché č. – tvrzení: a^2 je liché č.

$q' \Rightarrow p'$ věta obměněná $p \Rightarrow q$

1.4 MNOŽINY

Množina (A,B,...): soubor určitých prvků – konečná (žáci), nekonečná (R), prázdná ($\{\}$)

Určení množin: výčtem ($A = \{a, b, c, d\}$), symbolicky ($A = \{x \in N; 10 < x \leq 20\}$)

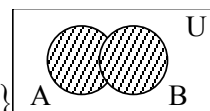
1.5 VZTAHY MEZI MNOŽINAMI

Podmnožina ($A \subset B$): „A je podmnožinou B“ – inkluze – def. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A; x \in B$

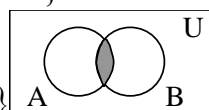
Rovnost ($A = B$): def. $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

1.6 OPERACE MEZI MNOŽINAMI

Vennovy diagramy: U – základní (universální) množina



Sjednocení ($A \cup B$): def. $C = A \cup B = \{x \in U; x \in A \vee x \in B\}$



Průnik ($A \cap B$): def. $C = A \cap B = \{x \in U; x \in A \wedge x \in B\}$

zákon komutativní (o záměně): $A \cup B = B \cup A$

$$A \cap B = B \cap A$$

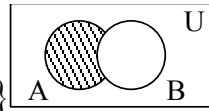
zákon asociativní (o sdružování): $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

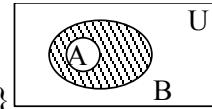
zákon distributivní (o roznásobení): $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Rozdíl ($A - B$): def. $C = A - B = \{x \in U; x \in A \wedge x \notin B\}$



Doplňěk (A'_B): def. $A \subset B \Rightarrow A'_B = \{x \in U; x \in B \wedge x \notin A\}$



de Morganova pravidla: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

1.7 ČÍSELNÉ INTERVALY

Otevřený: $(a, b) = \{x \in R; a < x < b\}$

Uzavřený: $\langle a, b \rangle = \{x \in R; a \leq x \leq b\}$

Polouzavřený: zleva uzavřený: $\langle a, b \rangle = \{x \in R; a \leq x < b\}$

zprava uzavřený: $(a, b) = \{x \in R; a < x \leq b\}$

S intervaly pracujeme stejně jako s množinami, a proto pro ně platí stejné operace.

1.8 SPOLEČNÝ NÁSOBEK A DĚLITEL

Nejmenší spol. násobek: $n(12, 28, 42) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$, v prvočíselném rozkladu má každé prvočíslo obsažené v nejvyšší mocnině.

Největší spol. dělitel: $D(12, 28, 42) = 2$, v prvočíselném rozkladu má pouze spol. prvočíslo.

2 MATEMATICKÉ DŮKAZY

Přímý důkaz ($A \Rightarrow B$): vycházíme z předpokladu dané věty a musíme se dopracovat k jejímu tvrzení

Např. $\forall a \in \mathbb{Z}^+; a = \text{liché č.} \Rightarrow a^2 = \text{liché č.}$

liché č.: $2k+1$, potom $(2k+1)^2 = 4(k^2+k)+1$, kde $4(k^2+k)$ je sudé.

Nepřímý důkaz ($A \Rightarrow B \Leftrightarrow B' \Rightarrow A'$): dokazujeme větu obměněnou pomocí přímého důkazu.

Např. $\forall m \in \mathbb{Z}^+; m^2 \text{ dělitelné } 3 \Rightarrow m \text{ dělitelné } 3$

nedělitelné 3: $3k+1 \vee 3k+2$, potom $(3k+1)^2 = 3(3k^2+2k)+1$ nebo $(3k+2)^2 = 3(3k^2+4k)+4$, kde $3(3k^2+2k)$ a $3(3k^2+4k)$ jsou dělitelná 3.

Důkaz sporem ($(A \Rightarrow B)' \Leftrightarrow A \wedge B'$):

Např. $\forall a, b \in \mathbb{R}^+; \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

předpokládáme $\exists a, b \in \mathbb{R}^+; \frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$, po úpravách rovnice: $(a-b)^2 < 0$, protože x^2

nemůže být < 0 – spor s předpokladem a daná věta platí.

Matematická indukce: Dokážeme, že platí $V(1)$, potom že pro $k \geq 1; V(k) \Rightarrow V(k+1)$.

Např. $\forall n \in \mathbb{N}; 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

1) ověření $n=1; L=P$

2) předpoklad $k \geq 1; L = 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 \quad P = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

máme dokázat $k+1; 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$$L = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] =$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

3) platí pro $\forall k \in \mathbb{N}$

3 MOCNINY A ODMOCNINY, MOCNINNÉ FUNKCE

3.1 MOCNINY S CELOČÍSELNÝM EXPONENTEM

$$a^r a^s = a^{r+s} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall r, s \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad a \neq 0$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$(ab)^r = a^r b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \quad b \neq 0$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \quad a \neq 0, r > 0$$

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \pm a$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall m, n, p \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad b \neq 0$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Slučovat lze pouze souhlasné odmocniny, odmocnit součet a rozdíl nelze.

Částečné odmocňování: $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{2} = 4 \cdot \sqrt[3]{2}$

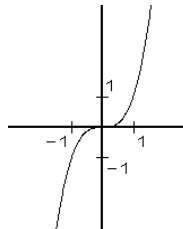
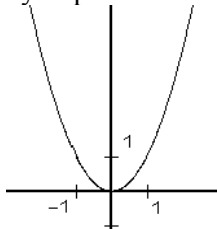
Usměrnění zlomků: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Mocniny s reálným exponentem: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}^+$

3.2 MOCNINNÉ FUNKCE

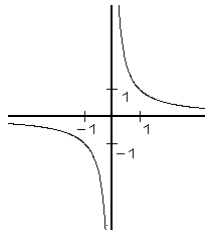
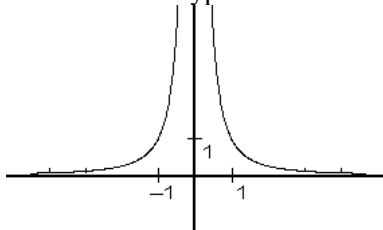
$$y = x^2 \quad y = x^3$$

vyšší parabolakubická parabola



$$y = x^{-2} \quad y = x^{-1}$$

rovnoosá hyperbola



4 ÚPRAVY ALGEBRAICKÝCH VÝRAZŮ

4.1 MNOHOČLENY

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

4.2 LOMENÉ VÝRAZY

Definiční obor – obor proměnnosti – (D) je množina, ve které má daný výraz řešení.

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$

4.3 DĚLENÍ MNOHOČLENU MNOHOČLENEM

$$(x^2 - 2x - 1) : (x - 1) = x - 1 - \frac{2}{x - 1}$$
$$\begin{array}{r} -(x^2 - x) \\ \hline -x - 1 \\ -(-x + 1) \\ \hline -2 \end{array}$$

5 FUNKCE A JEJICH ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Funkce: předpis, který každé hodnotě nezávislé proměnné x z def. oboru přiřadí **právě jednu** hodnotu závislé proměnné y .

Graf funkce: množina všech bodů o souřadnicích $[x, f(x)]$.

Obor hodnot (H): množina řešení (y) dané funkce.

5.1 VLASTNOSTI FUNKCÍ

Rostoucí: $\forall x \in D; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ – např. $y = x$

Klesající: $\forall x \in D; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ – např. $y = -x$

Konstantní: $\forall x \in D; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ – např. $y = 0$

Sudá: $\forall x \in D; f(-x) = f(x)$ – např. $y = \cos(x)$

Lichá: $\forall x \in D; f(-x) = -f(x)$ – např. $y = \sin(x)$

Periodická: průběh funkce se v určitých cyklech opakuje – např. $y = \sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$

Prostá (monotónní): $\forall x \in D; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ – např. $y = x$

Inverzní: graf funkce (f) a funkce inverzní (f^{-1}) je souměrný podle osy I. a III. kvadrantu. Např.

$$f : y = x^2 \Rightarrow f^{-1} : x = y^2 \text{ (zaměníme } x \text{ a } y\text{)}. \text{ Pro } D = R_0^+ \text{ platí } y = \sqrt{x}$$

5.2 TYPY FUNKCÍ

Jednoduchá: $y = f(x)$ – např. $y = \sin(x)$

Složená: $y = g[f(x)]$ – např. $y = \sin^2 x$

6 LINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FUNKCE

6.1 LINEÁRNÍ

$$y = ax + b \quad a \neq 0 \quad D = R \quad H = R$$

pro $a = 0 \Rightarrow y = b$ – funkce konstantní

pro $a > 0$ – funkce rostoucí

pro $a < 0$ – funkce klesající

6.2 KVADRATICKÁ

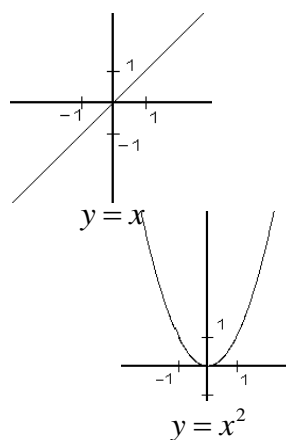
$$y = ax^2 + bx + c$$

$|a| > 1$ – sevřená

$|a| < 1$ – rozevřená

$a > 0$ – v horní polorovině (konvexní)

$a < 0$ – v dolní polorovině (konkávní)



7 LINEÁRNÍ FUNKCE, ROVNICE A NEROVNICE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

7.1 ROVNICE

Obor proměnnosti: obor, v němž chceme danou rovnici řešit.

Definiční obor (D): obor, v němž má rovnice smysl.

Obor pravdivosti (P=K): množina kořenů.

Řešit rovnici znamená najít takové x , které dané rovnici vyhovuje.

Nutno provést zkoušku.

Ekvivalentní úpravy rovnic:

- 1) Rovnice lze převádět z jedné strany na druhou, ale s opačným znaménkem.
- 2) Rovnice se nezmění, když k oběma jejím stranám přičteme nebo odečteme stejný výraz.
- 3) Rovnice se nezmění, když obě její strany vynásobíme nebo vydělíme stejným výrazem.

7.2 NEROVNICE

ostré znaky nerovnosti: $<$ menší než

$>$ větší než

neostré znaky nerovnosti: \leq menší nebo rovno než

\geq větší nebo rovno než

Ekvivalentní úpravy nerovnic:

- 1) Nerovnice se nezmění, když k oběma jejím stranám přičteme nebo odečteme stejný výraz.
- 2) V nerovnici lze převádět z jedné strany na druhou, ale s opačným znaménkem.
- 3) Nerovnice se nezmění, jestliže její obě strany vynásobíme stejným výrazem, který je kladný na celém definičním oboru.
- 4) Násobíme-li nerovnici výrazem, který je záporný na celém def. oboru, pak musíme převrátit znak nerovnosti.

7.3 ROVNICE A NEROVNICE V SOUČINOVÉM TVARU

Rovnice: $(x-2)(3-x)=0$ – Součin je nulový, je-li nulový alespoň 1 činitel – $x=2 \vee x=3$.

$\frac{x-2}{3-x}=0$ – Podíl je nulový, je-li čítecitel roven nule – $x=2$

Nerovnice: $(x-2)(3-x)<0$ nebo $\frac{x-2}{3-x}<0$ ($x \neq 3$) – pomocí **nulových bodů**

$$x-2=0 \quad 3-x=0$$

$$x=2 \quad x=3$$

$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x-2$	-	+	+
$3-x$	+	+	-

Pozn.: V nulových bodech mění dvojnásobník znaménko. Je-li u x koeficient kladný, pak od nulového bodu nalevo je dvojnásobník záporný a napravo kladný.

$x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$ – při neostrém znaku nerovnosti by byl interval uzavřený.

7.4 ABSOLUTNÍ HODNOTA

Absolutní hodnota: vzdálenost bodu od počátku na číselné ose.

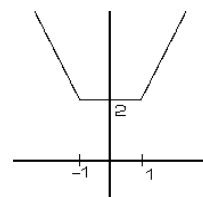
Funkce, rovnice a nerovnice řešíme pomocí **nulových bodů**.

Např. $y = |x+1| + |1-x|$

$$x+1=0 \quad 1-x=0$$

$$x=-1 \quad x=1$$

$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$	-	+	+
$1-x$	+	+	-



$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; \infty)$
$y = -(x+1) + (1-x)$	$y = (x+1) + (1-x)$	$y = (x+1) - (1-x)$
$y = -2x$	$y = 2$	$y = 2x$

Pozor u rovnic a nerovnic musíme vždy výsledek porovnat s intervalem – např. $x \in (1; 3)$ a výsledek je $x = 4$, proto rovnice nemá v tomto intervalu řešení.

8 KVADRATICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + px + q = 0$$

Neúplná kvadratická rovnice: $b, c = 0 \vee c = 0$

Ryze kvadratická rovnice: $b = 0$

$$x^2 = a$$

$$x = |\sqrt{a}| = \pm\sqrt{a}$$

Řešení kvadratické rovnice:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

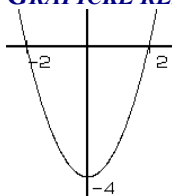
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$D > 0$ 2 reálná řešení

$D = 0$ 1 reálné řešení

$D < 0$ 2 komplexní řešení

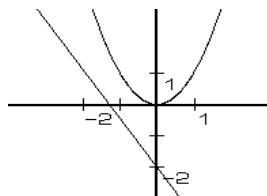
8.1 GRAFICKÉ ŘEŠENÍ KVADRATICKÉ ROVNICE



$$x^2 - 4 = 0$$

$$y = x^2 - 4$$

$$K = \{\pm 2\}$$



$$2x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$y = x^2 \wedge y = -1,5x - 2$$

$$K = \{ \}$$

9 VZTAHY MEZI KOŘENY A KOEFICIENTY KVADRATICKÉ ROVNICE

$$x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = q = \frac{c}{a}$$

Rozklad kvadratického dvojčlenu: $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Diskuse kvadratické rovnice s parametrem: viz. otázka č. 13

10 IRACIONÁLNÍ ROVNICE

tzn. neznámá je pod odmocninou

provádíme zkoušku

$$\sqrt{6-x} + \sqrt{3x-2} = 4 \quad /(\)^2$$

$$(6-x) + 2\sqrt{6-x}\sqrt{3x-2} + (3x-2) = 16$$

$$2\sqrt{(6-x)(3x-2)} = 12 - 2x$$

$$\sqrt{(6-x)(3x-2)} = 6-x \quad /(\)^2$$

$$(6-x)(3x-2) = (6-x)^2 \quad / (6-x)$$

$$6 - x_1 = 0$$

$$x_1 = 6$$

$$3x_2 - 2 = 6 - x_2$$

$$\vee \quad 4x_2 = 8$$

$$x_2 = 2$$

$$L_1 = \sqrt{0} + \sqrt{16} = 4 \quad L_2 = \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$$

$$P_1 = 4 \quad P_2 = 4$$

$$L_1 = P_1 \Rightarrow K_1 = \{6\} \quad L_2 = P_2 \Rightarrow K_2 = \{2\}$$

11 KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Komplexní – složené, imaginární – neskutečné, vymyšlené

$a = [a_1 + a_2 i]$ – Gaussova rovina, $|a|$ – vzdálenost v G. rovině od počátku

Absolutní hodnota: $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ – reálné číslo

Komplexní jednotka: číslo, jehož absolutní hodnota se rovná 1

Algebraický tvar: $a = a_1 + a_2 i$

Komplexně sdružené č.: $\bar{a} = a_1 - a_2 i$,

Goniometrický tvar: $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

Exponenciální tvar: $a = |a| \cdot e^{i\alpha}$ – α v radiánech

Opačné číslo: $-a = -a_1 - a_2 i$

Převrácené číslo: $\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1 + a_2 i}$

11.1 OPERACE S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

$$i^2 = -1$$

Sčítání: $a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i$

Násobení: $a \cdot b = (a_1 + a_2 i)(b_1 + b_2 i)$

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)] = |a| \cdot |b| \cdot e^{i(\alpha + \beta)}$$

Dělení: $\frac{a}{b} = \frac{a_1 + a_2 i}{b_1 + b_2 i} \cdot \frac{b_1 - b_2 i}{b_1 - b_2 i}$

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] = \frac{|a|}{|b|} \cdot e^{i(\alpha - \beta)}$$

11.2 MOIVREOVA VĚTA

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

Mocniny: $a^n = |a|^n \cdot (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$

Odmocniny: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|} \cdot (\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n})$

12 ŘEŠENÍ ROVNIC V OBORU KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

12.1 KVADRATICKÉ ROVNICE S DISKRIMINANTEM MENŠÍM 0

$$x = \pm \sqrt{-m} = \pm i \sqrt{m}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (D < 0) \Rightarrow x = \frac{-b \pm i \sqrt{|D|}}{2a}$$

12.2 BINOMICKÉ ROVNICE

$$x^n = m \Rightarrow x = \sqrt[n]{m} = \sqrt[n]{|m|} \cdot (\cos \frac{0 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{n})$$

Je-li binomická rovnice s reálnými kořeny stupně sudého, pak má 2 reálné kořeny (čísla opačná) a komplexní kořeny jsou vždy 2 a 2 komplexně sdružené.

Je-li stupně lichého, pak má jeden reálný kořen a 2 a 2 komplexně sdružené.

13 ROVNICE S PARAMETREM

Lineární rovnice s parametrem: $x(t^2 - 1) = t - 1$
 $x(t-1)(t+1) = t-1$

$$\begin{array}{l} t \neq 1 \quad \vee \quad t = 1 \\ x(t+1) = 1 \quad \quad \quad 0 = 0 \Rightarrow K = R \\ t \neq -1 \quad \vee \quad t = -1 \end{array}$$

$$x = \frac{1}{t+1} \quad 0 \neq 1$$

$$K = \left\{ \frac{1}{t+1} \right\} \quad K = \{ \}$$

Diskuse:

pro $t \neq 1, -1$ má $K = \left\{ \frac{1}{t+1} \right\}$

pro $t = 1$ má $K = R$

pro $t = -1$ má $K = \{ \}$

Kvadratická rovnice s parametrem: $px^2 + bx + c = 0 \Rightarrow D = b^2 - 4pc$

$$D > 0 \Rightarrow p < \frac{b^2}{4c} \quad x \text{ má 2 řešení}$$

$$D = 0 \Rightarrow p = \frac{b^2}{4c} \quad x \text{ má 1 řešení}$$

$$D < 0 \Rightarrow p > \frac{b^2}{4c} \quad x \text{ nemá řešení v } R$$

U parametrických rovnic s neznámou ve jmenovateli nebo u rovnic, kde umocníme či odmocníme, děláme zkoušku.

14 SOUSTAVY ROVNIC A NEROVNIC

14.1 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC O DVOU A VÍCE NEZNÁMÝCH

Metody: sčítací, dosazovací

$$\begin{array}{r} \frac{2}{x+z} + \frac{3}{x+y} = 13 \\ \frac{1}{x+z} - \frac{2}{y+z} = -16 \\ \frac{3}{x+y} + \frac{1}{y+z} = 15 \end{array}$$

$x, y, z \in R$
 $x \neq -y, -z$
 $y \neq -z$

substituce: $\frac{1}{x+z} = a$
 $\frac{1}{x+y} = b$
 $\frac{1}{y+z} = c$

$$\begin{array}{r} 2a + 3b = 13 \\ a - 2c = -16 \\ 3b + c = 15 \quad / \cdot 2 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{a}{2} + 8 = \frac{4}{2} + 8 = 10 \\ a = 14 - 6b = 14 - 10 = 4 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 2a + 3b = 13 \\ a + 6b = 14 \quad /(-2) \\ -9b = -15 \\ b = \frac{5}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{x+z} = 4 \\ \frac{1}{x+y} = \frac{5}{3} \\ \frac{1}{y+z} = 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x+z = \frac{1}{4} \quad /(-1) \\ x+y = \frac{3}{5} \\ y+z = \frac{1}{10} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{8} - z = \frac{3}{8} \\ z = \frac{4}{40} - y = -\frac{1}{8} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} y-z = \frac{7}{20} \\ y+z = \frac{1}{10} \\ 2y = \frac{9}{20} \\ y = \frac{9}{40} \end{array}$$

Soustavy lineárních nerovnic o jedné neznámé
Vyřešíme každou zvlášť, potom uděláme průnik výsledků.

14.2 GRAFICKÉ ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH ROVNIC A NEROVNIC O DVOU NEZNÁMÝCH

Nakreslíme graf funkcí. Výsledkem je průnik grafů.

14.3 SOUSTAVY LINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ ROVNICE

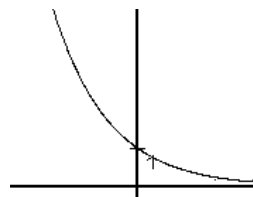
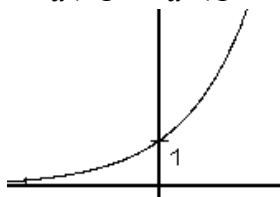
Řešíme dosazovací metodou – z lineární vyjádříme a dosadíme do kvadratické.

15 EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÉ FUNKCE

15.1 GRAFY FUNKCÍ

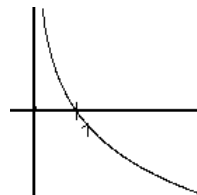
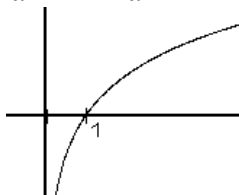
Exponenciální funkce: $y = a^x$ $a > 0, a \neq 1$

$a > 1$ $a < 1$



Logaritmická funkce: $y = \log_a x$ $a > 0, a \neq 1$ $D = \mathbb{R}^+$

$a > 1$ $a < 1$



15.2 VĚTY O LOGARITMECH

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b \quad b > 0$$

nejde logaritmovat součet ani rozdíl

$$\log_a (r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$$

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$$

$$\log_a r^s = s \cdot \log_a r$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$a^{\log_a x} = x$$

Pokud je základ $e = 2,71828\dots$, jedná se o přirozený logaritmus a značí se $\ln x$

Při základu rovnému 10 se jedná o dekadický logaritmus – $\log x$

16 EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE A NEROVNICE

rovnice

$$3^{x+2} - 5^x = 3^{x+4} - 5^{x+2}$$

$$3^x \cdot 3^2 - 5^x = 3^x \cdot 3^4 - 5^x \cdot 5^2$$

$$3^x(3^2 - 3^4) = 5^x(1 - 5^2)$$

$$72 \cdot 3^x = 24 \cdot 5^x$$

$$3 \cdot 3^x = 5^x$$

$$3^{x+1} = 5^x$$

$$(x+1)\log 3 = x \cdot \log 5$$

$$x(\log 3 - \log 5) = -\log 3$$

$$x = \frac{\log 3}{\log 5 - \log 3}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+3} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{x+2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+6} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+6}$$

$$4x+6 \geq 3x+6$$

$$x \geq 0$$

Základ < 1

převrací se nerovnost

$$2^x \geq 3^{x+1}$$

$$x \cdot \log 2 \geq x \cdot \log 3 + \log 3$$

$$x(\log 2 - \log 3) \geq \log 3$$

$$x \leq \frac{\log 3}{\log 2 - \log 3}$$

$\log 2 - \log 3 < 0$

převrací se nerovnost

$$\sqrt[3]{81} + \frac{27}{\sqrt[3]{81}} = 12 \quad \text{-- substitucí } a = \sqrt[3]{81}$$

$$a^2 - 12a + 27 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{81} = 9 \vee \sqrt[3]{81} = 3$$

$$3^{\frac{4}{x}} = 3^2 \vee 3^{\frac{4}{x}} = 3^1 \Rightarrow x = 2 \vee x = 4$$

17 LOGARITMICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

Podmínky pro logaritmus i pro jmenovatele.

Odlogaritmovat mohou pouze tehdy, pokud mají logaritmy stejný základ.

rovnice:

$$\frac{\log x}{\log(3x+5)} = 1$$

podmínky:

$$x > 0 \quad \wedge \quad 3x+5 > 0 \quad \wedge \quad \log(3x+5) \neq 0$$

$$\log x = \log(3x+5)$$

$$x > -\frac{5}{3}$$

$$\log(3x+5) \neq \log 1$$

$$x = 3x+5$$

$$x \neq -\frac{4}{3}$$

$$x = -2,5 \quad K = \{ \}$$

nerovnice: při $0 < a < 1$ se u exponenciálních a logaritmických nerovnic převrací nerovnost

$$\log_2(x+2) > 3$$

$$\log_{0,5}(x+2) > 3$$

$$\log_2(x+2) > \log_2 8$$

$$\log_{0,5}(x+2) > \log_{0,5} \frac{1}{8}$$

Podmínky:

$$x > 6$$

$$x < -\frac{15}{8}$$

$$x+2 > 0$$

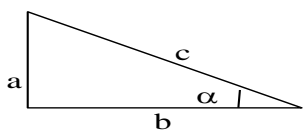
$$x > -2$$

Základ < 1

převrací se nerovnost

18 GONIOMETRICKÉ FUNKCE

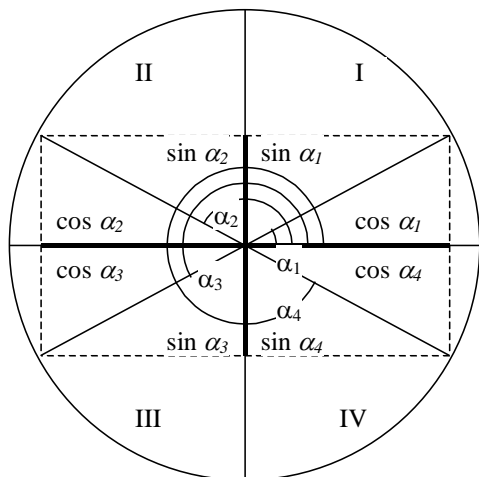
18.1 DEFINICE NA PRAVOÚHLÉM TROJÚHELNÍKU



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \operatorname{sec} \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{cot} g \alpha = \frac{b}{a} \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}$$

18.2 DEFINICE NA JEDNOTKOVÉ KRUŽNICI



$$\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$$

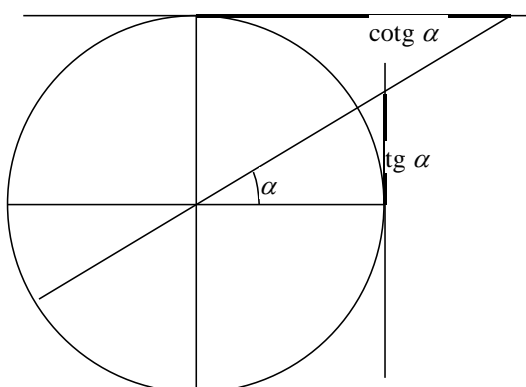
$$\alpha_3 = 180^\circ + \alpha_1$$

$$\alpha_4 = 360^\circ - \alpha_1$$

II. kvadrant: $\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1$
 $\cos \alpha_2 = -\cos \alpha_1$

III. kvadrant: $\sin \alpha_3 = -\sin \alpha_1$
 $\cos \alpha_3 = -\cos \alpha_1$

IV. kvadrant: $\sin \alpha_4 = -\sin \alpha_1$
 $\cos \alpha_4 = \cos \alpha_1$



$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \text{lichá funkce}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \text{sudá funkce}$$

perioda je 2π

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad \text{funkce lichá}$$

$$\operatorname{cot} g(-\alpha) = -\operatorname{cot} g \alpha \quad \text{funkce lichá}$$

perioda je π

18.3 ZÁKLADNÍ ÚHLY

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	E
$\operatorname{cotg} \alpha$	E	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Doplňkový úhel: $\alpha' = 90^\circ - \alpha$

$$\sin \alpha = \cos \alpha'$$

$$\cos \alpha = \sin \alpha'$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \alpha'$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha'$$

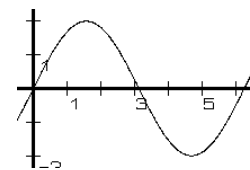
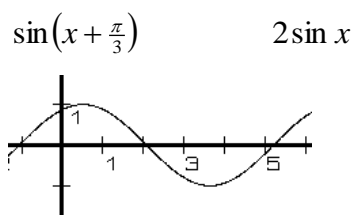
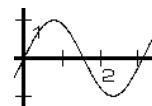
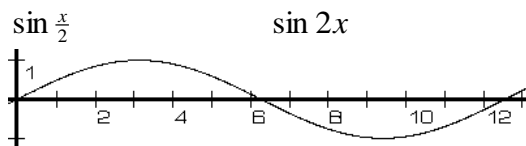
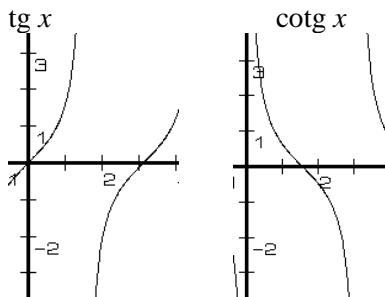
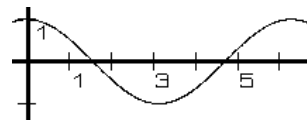
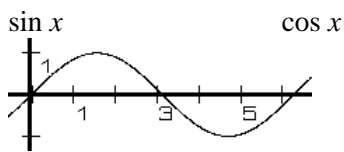
18.4 OBLOUKOVÁ MÍRA

1 rad je středový úhel, který přísluší oblouku jednotkové kružnice, jehož délka je 1.

$$1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 44,81''$$

$$360^\circ = 2\pi$$

18.5 GRAFY FUNKCÍ



19 VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

$$\text{Součtové vzorce: } \sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\pm \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} x \mp \operatorname{cotg} y}$$

$$\text{Dvojnásobný úhel: } \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\text{Poloviční úhel: } \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{znaménko se určí} \\ \searrow \text{podle kvadrantu} \end{array}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\text{Součtové věty: } \sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\text{Převody přes liché násobky } \pi/2: \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$$

20 GONIOMETRICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

20.1 ZÁKLADNÍ GONIOMETRICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

$$\sin x = a, \cos x = a \quad a \in \langle -1, 1 \rangle \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad a \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\operatorname{cotg} x = a \quad a \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R} - \{ k\pi \}$$

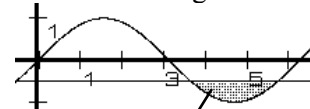
Př. rovnice

$$\sin x = -0,5$$

$$x_1 = 210^\circ, \quad x_2 = 330^\circ$$

$$K = k \in \mathbb{Z} \cup \{ 210^\circ + 2k\pi, 330^\circ + 2k\pi \}$$

interval se určí podle jednotkové kružnice nebo grafu



nerovnice

$$\sin x \leq -0,5$$

$$x_1 = 210^\circ, \quad x_2 = 330^\circ$$

$$K = k \in \mathbb{Z} \cup \langle 210^\circ + 2k\pi, 330^\circ + 2k\pi \rangle$$

20.2 SLOŽITĚJŠÍ GONIOMETRICKÉ ROVNICE

Pokud je v rovnici více goniometrických funkcí, převedeme je na jednu goniometrickou funkci. Pokud odmocňujeme, musíme provést zkoušku.

$$\sin 3x = \cos 2x$$

$$\sin 3x - \sin(90^\circ - 2x) = 0$$

$$2 \cdot \cos \frac{3x + 90^\circ - 2x}{2} \cdot \sin \frac{3x - 90^\circ + 2x}{2} = 0$$

$$\cos \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} = 0 \quad \vee \quad \sin \frac{5x - \frac{\pi}{2}}{2} = 0$$

$$\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\frac{5x - \frac{\pi}{2}}{2} = k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi$$

21 TRIGONOMETRIE

21.1 PRAVOÚHLÝ TROJÚHELNÍK

Goniometrické funkce

21.2 OBECNÝ TROJÚHELNÍK

Sinova věta: $2r = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ – poměr strany a protilehlého vnitřního úhlu je konstantní a je roven průměru kružnice opsané. **Použití:** známe stranu a 2 úhly nebo 2 strany a úhel jedné z nich.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Kosinova věta: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$ – **Použití:** známe 3 strany nebo 2 strany a úhel jimi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

sevržený.

22 SHODNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ

Samodružný bod – bod X je totožný se svým obrazem $X'=X$

Samodružný útvar – útvar U , jehož obrazem U' je U

Osová souměrnost: osa souměrnosti

Středová souměrnost: střed souměrnosti

Posunutí (translace): vektor posunutí

Otočení (rotace): střed otočení, úhel otočení

Totožnost (identita)

23 PODOBNOST A STEJNOLEHLOST

23.1 PODOBNOST

Pro každé body X, Y a jejich obrazy X', Y' platí: $|X'Y'| = k|XY|$

$k > 1$ zvětšení

$k = 1$ shodnost

$k < 1$ zmenšení

V podobném trojúhelníku platí, že ve stejném poměru jsou i výšky, těžnice, střední příčky, poloměry kružnice opsané i vepsané, ...

2 trojúhelníky jsou si podobné shodují-li se ve dvou úhlech nebo v 1 úhlu a poměru stran svírajících tento úhel.

23.2 STEJNOLEHLOST $H(S; \kappa)$

Pro každé X platí: $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$, kde S je *střed stejnolehlosti* a κ je *koefficient stejnolehlosti*.

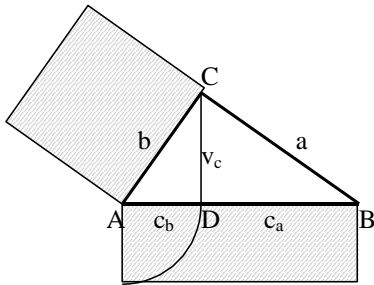
Přímka se zobrazí na přímku rovnoběžnou.

24 PYTHAGOROVA VĚTA, EUKLIDOVY VĚTY

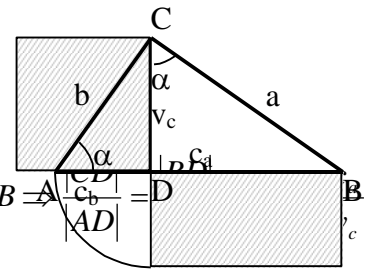
Platí pro pravoúhlý trojúhelník ACB .

I. Euklidova věta: $v_c^2 = c_a \cdot c_b$ – obsah čtverce sestrojeného nad výškou trojúhelníka se rovná obsahu obdélníka sestrojeného z obou úseků na přeponě.

Odvození:



$$R\Delta ACB \Rightarrow \angle DAC = \angle DCB \Rightarrow \frac{|c_b|}{|AD|} = \frac{|v_c|}{|c_a|}$$



II. Euklidova věta: $b^2 = c \cdot c_b$, $a^2 = c \cdot c_a$ – obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou se rovná obsahu obdélníka sestrojeného z celé přepony a úseku přilehlého k dané odvěsně.

Odvození:

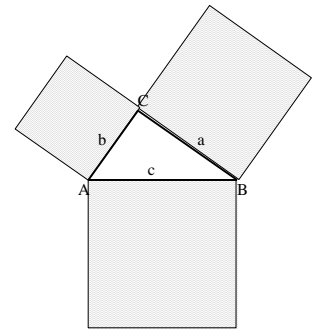
$$R\Delta ACB \text{ a } R\Delta ADC \Rightarrow \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow \frac{c_b}{b} = \frac{b}{c}$$

Pythagorova věta: $a^2 + b^2 = c^2$ – součet obsahů čtverců nad odvěsnami se rovná obsahu čtverce nad přeponou.

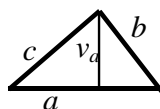
Odvození: sečtením Euklidových vět. $a^2 + b^2 = c^2$

$$c \cdot c_a + c \cdot c_b = c^2$$

$$c_a + c_b = c$$



25 ROVINNÉ ÚTVARY



Trojúhelník: $O = a + b + c$

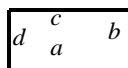
$$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

Heronův vzorec: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

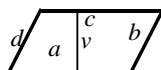
Obdélník: $O = 2(a+b)$

$$S = ab$$



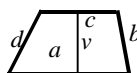
Rovnoběžník: $O = 2(a+b)$

$$S = a \cdot v_a$$



Lichoběžník: $O = a + b + c + d$

$$S = \frac{(a+c)v}{2}$$



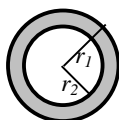
Pravidelný n -úhelník: $S = n \cdot S_{\Delta ABS}$ – n -krát obsah jednoho trojúhelníka

Kruh: $O = 2\pi r$

$$S = \pi r^2$$



Mezikruží: $S = |\pi r_1^2 - \pi r_2^2|$



Oblouk: $O = r\varphi$ – úhel v radiánech



Výseč: $S = \frac{r^2}{2}\varphi$



Úseč: $S = \frac{r^2}{2}\varphi - \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin \varphi$ – obsah výseče minus obsah trojúhelníka



26 NEROTAČNÍ TĚLESA

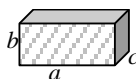
Hranol: $V = S_p \cdot v$

$$S = 2S_p + S_{pl}$$



Kvádr: $V = abc$

$$S = 2(ab + bc + ac)$$



Jehlan: $V = \frac{1}{3}S_p \cdot v$

$$S = S_p + S_{pl}$$



Komolý jehlan: $V = \frac{1}{3}v(S_{p1} + S_{p2} + \sqrt{S_{p1} \cdot S_{p2}})$

$$S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl}$$



27 ROTAČNÍ TĚLESA

Válec: $V = \pi r^2 v$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$$



Kužel: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$

$$S = \pi r^2 + \pi r s, \text{ kde } s = \sqrt{r^2 + v^2} \text{ - délka pláště}$$



Komolý kužel: $V = \frac{1}{3} \pi v (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + (\pi r_1 + \pi r_2) s$$



Koule: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

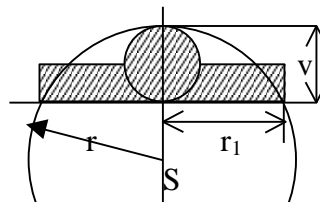
$$S = 4\pi r^2$$



Kulová úseč: $V = \pi r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \frac{4}{3} \pi \left(\frac{v}{2}\right)^3$

objem válce plus objem koule

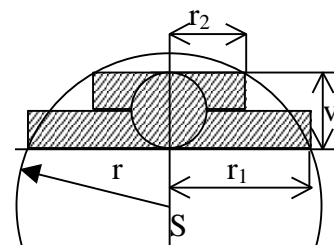
$$r_1 = \sqrt{r^2 - (r - v)^2}$$



$$S = \pi r_1^2 + 2\pi r v \text{ - obsah podstavy plus obsah kulového vrchlíku}$$

Kulová vrstva: $V = \pi r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \pi r_2^2 \cdot \frac{v}{2} + \frac{4}{3} \pi \left(\frac{v}{2}\right)^3$

objem dvou válců a objem koule



28 MATICE A DETERMINANTY

$$a_{ij} \quad \dots \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \dots m \\ j = 1, 2, 3 \dots n \end{matrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Společný název pro řádek a sloupec je **řada**.

Typ matice: Obdélníková, čtvercová ($m=n$), sloupcová ($m,1$) a řádková ($1,n$), diagonální (samé nuly, jen na hlavní diagonále ne), jednotková (samé nuly, na diagonále jedničky)

Hlavní diagonála: z LH do PD rohu, **vedlejší diagonála:** z PH do LD rohu

Transponovaná matice: zaměněné sloupce a řádky

Symetrická matice: matice je stejná jako transponovaná

Hodnost matice: počet lineárně nezávislých řádků v matici (maximálně rovna menšímu z m a n)

28.1 OPERACE S MATICEMI

Hodnost matice se nemění, když

- 1) matici transponujeme
- 2) nějakou řadu vynásobíme nenulovým číslem
- 3) k některé řadě přičteme lineární kombinaci (násobek) jiné řady s ní rovnoběžné
- 4) v matici vynecháme nebo přidáme řadu, která je lineární kombinací jiné řady s ní rovnoběžné

Matice téhož typu se stejnou hodností jsou ekvivalentní $A \cong B$

Hodnost matice:

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 11 \\ -3 & -8 & 5 \\ 1 & -12 & 21 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -12 & 21 \\ -3 & -8 & 5 \\ 7 & 4 & 11 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -12 & 21 \\ 0 & -44 & 68 \\ 0 & 88 & -136 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -12 & 21 \\ 0 & -11 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h=2$$

Násobení matice: $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$

Součet matic: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

28.2 DETERMINANT

Determinant 2. stupně: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Determinant 3. stupně: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

$\begin{matrix} / & / & / & \backslash & \backslash & \backslash \\ - & - & - & + & + & + \end{matrix}$

29 LINEÁRNÍ ALGEBRA

soustava m rovnic o n neznámých

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

pokud $b_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$ je soustava **homogenní**, jinak je **nehomogenní**

podmínka řešitelnosti

1) $h \neq h_r$ – nemá řešení

2) $h = h_r$

• $h = n$ – jedno řešení

• $h < n$ – nekonečně mnoho řešení ($n - h$ neznámých volíme a ostatní dosadíme – např.

$$x_4 = t_1, x_3 = t_2, x_2 = t_1 + t_2, x_1 = 2t_2)$$

Příklad:

$$\begin{array}{rcl} -x_1 & +x_3 & = -1 \\ 2x_1 & +7x_2 & = 1 \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 = 2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{array} \right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 30 & 6 \end{array} \right) \quad h = h_r = n$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \quad x_1 = 1\frac{1}{5}$$

$$-x_2 + 4x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{5}$$

$$30x_3 = 6 \quad x_3 = \frac{1}{5}$$

Cramerovo pravidlo: $m=n$, pokud determinant $|A| \neq 0$ – řešení $x_k = \frac{|A_k|}{|A|}$, kde A_k je matice, ve

které jsme k . sloupec nahradil sloupcem pravé strany.

Příklad:

$$\begin{array}{rcl} -x_1 & +x_3 & = -1 \\ 2x_1 & +7x_2 & = 1 \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 = 2 \end{array} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad |A| = -30$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad |A_1| = -36 \quad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-36}{-30} = 1\frac{1}{5}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad |A_2| = 6 \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{6}{-30} = -\frac{1}{5}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad |A_3| = -6 \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-6}{-30} = \frac{1}{5}$$

30 VEKTORY

Vektor je množina všech souhlasně orientovaných úseček, které mají stejnou velikost.

Vektory rovnoběžné jsou **kolineární**. (souhlasně, nesouhlasně kolineární)

$$\overline{AB} = (X_B - X_A, Y_B - Y_A)$$

$$|AB| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Vektor opačný: $-\vec{u} = (-u_1, -u_2)$

Součet vektorů: $\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2)$

Násobení vektoru skalárem: $k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$

Dva vektory jsou **lineárně závislé**, jestliže jeden je lineárním násobkem druhého.

Tři vektory jsou **lineárně závislé**, je-li alespoň jeden z nich lineární kombinací ostatních dvou.

Tři vektory jsou **lineárně nezávislé**, pokud ani jeden není lineární kombinací zbývajících dvou.

Skalární součin: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = u_1 v_1 + u_2 v_2$ – výsledkem je skalár

Úhel dvou vektorů: $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Rovnoběžné vektory: $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = k \cdot \vec{v}$, **kolmé vektory:** $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Vektorový součin: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \varphi$ – velikost. Směr: kolmo k oběma vektorům, pravotočivě

vá báze (prsty – \vec{u}, \vec{v} , palec ukazuje směr).

$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ – opačná orientace

$$k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \times \vec{v}$$

$$\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{w} \times \vec{u}) + (\vec{w} \times \vec{v})$$

$\vec{u} \times \vec{u} = \mathbf{0}$ – nulový vektor

31 ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ V ROVINĚ

Přímka:

- parametrické vyjádření:

$$x = X_1 + t \cdot u_1$$

$$y = Y_1 + t \cdot u_2$$

pro přímkou – $t \in \mathbb{R}$

pro úsečkou – $t \in \langle 0, 1 \rangle$

pro polopřímkou – $t \in \langle 0, \infty \rangle$

- obecná rovnice přímky:

$$ax + by + c = 0$$

$\vec{n} = (a, b)$ – **normálový** (kolmý) vektor

$\vec{s} = (-b, a)$ – **směrový** vektor

$$p \parallel O_x \Rightarrow by + c = 0$$

$$p \parallel O_y \Rightarrow ax + c = 0$$

- úsekový tvar rovnice přímky:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

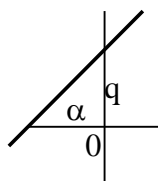
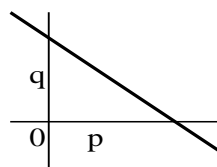
$$p = -\frac{c}{a}$$

$$q = -\frac{c}{b}$$

- směrový tvar:

$$y = kx + q$$

$$k = -\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$



Polorovina: $ax + by + c \geq 0$

32 ANALYTICKÁ GEOMETRIE LINEÁRNÍCH ÚTVARŮ V PROSTORU

Přímka definována pouze parametricky.

Rovina:

- parametrická rovnice:

$$x = X_1 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1$$

$$y = Y_1 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2$$

$$z = Z_1 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3$$

kde $A = [X_1, Y_1, Z_1]$ je bod roviny a \mathbf{u}, \mathbf{v} jsou nekolineární vektory vycházející z bodu A a náležející do roviny.

- obecná rovnice roviny:

$$ax + by + cz + d = 0$$

získáme ji:

- 1) pomocí dvou vektorů náležejících rovině – přes normálový vektor

$$\vec{\mathbf{n}} = (a, b, c) = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \text{ – normálový vektor}$$

- 2) z parametrické rovnice – vyloučením t, s

- 3) pomocí 3 bodů náležejících do roviny – dosazením bodů za x, y, z a dopočítáním a, b, c, d , přičemž za jednu neznámou volíme

zvláštní případy rovnice:

$$\rho \parallel O_x \Rightarrow a = 0, b \neq 0, c \neq 0$$

$$\rho \parallel O_y \Rightarrow a \neq 0, b = 0, c \neq 0$$

$$\rho \parallel O_z \Rightarrow a \neq 0, b \neq 0, c = 0$$

$$\rho \parallel O_x \wedge \rho \parallel O_y \Rightarrow a = 0, b = 0, c \neq 0$$

33 POLOHOVÉ A METRICKÉ VZTAHY ÚTVARŮ V ROVINĚ

Vzájemná poloha dvou přímek:

rovnoběžné

různé – žádný společný bod

shodné – nekonečně mnoho společných bodů

různoběžné – jeden společný bod

Odchylka dvou přímek: $\cos \alpha = \frac{|\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}|}{|\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}|} = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

Vzdálenost bodu od přímky: $|Ap| = \frac{|aX_0 + bY_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad A = [X_0, Y_0]$

34 POLOHOVÉ A METRICKÉ VLASTNOSTI ÚTVARŮ V PROSTORU

Vzájemná poloha dvou přímek:

- rovnoběžné
- různé – žádný společný bod
- shodné – nekonečně mnoho společných bodů
- různoběžné – jeden společný bod
- mimoběžné – žádný společný bod, neleží v jedné rovině

Vzájemná poloha dvou rovin:

- rovnoběžné
- různé – žádný společný bod
- shodné – nekonečně mnoho společných bodů
- různoběžné – jedna společná přímka – průsečnice

Příklad:

$$\rho: 2x - y - z - 1 = 0$$

$$\sigma: x + y + 2z - 3 = 0$$

$$p: \begin{cases} 3x + z - 4 = 0 \\ x = t \end{cases}$$

Jednu neznámou nahradíme parametrem

$$z = 4 - 3x = 4 - 3t$$

$$y = 3 - x - 2z = -5 + 5t$$

Odchylka dvou přímek: stejné jako v rovině

$$\text{Odchylka přímky od roviny: } \sin \alpha = \frac{|\vec{s}_p \cdot \vec{n}_\rho|}{|\vec{s}_p| \cdot |\vec{n}_\rho|}$$

$$\text{Odchylka dvou rovin: } \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_\rho \cdot \vec{n}_\tau|}{|\vec{n}_\rho| \cdot |\vec{n}_\tau|}$$

$$\text{Vzdálenost bodu a roviny: } v = \frac{|aX_0 + bY_0 + cZ_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad A = [X_0, Y_0, Z_0]$$

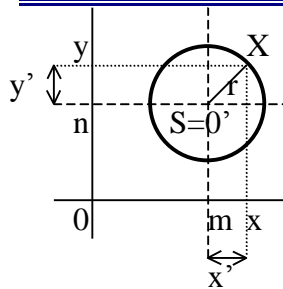
Vzdálenost bodu od přímky: vytvoříme rovinu kolmou k přímce tak, aby procházela bodem A a spočítáme vzdálenost mezi A a průsečíkem přímky a roviny. $\vec{s}_p = \vec{n}_\rho$, $v = |A \rho \cap p|$

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek: $v(p, q) = v(A, q)$; $A \in p$

Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné: $v(p, \rho) = v(A, \rho)$; $A \in p$

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin: $v(\rho, \tau) = v(A, \tau)$; $A \in \rho$

35 ANALYTICKÁ GEOMETRIE KRUŽNICE A ELIPSY



Transformační rovnice: $x' = x - m$
 $y' = y - n$

35.1 KRUŽNICE

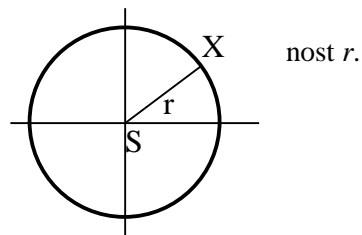
Množina všech bodů, které mají od středu (S) stejnou vzdálenost r .
 $S = [m, n]$

Středová rovnice: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$

Vnitřek kružnice: $x^2 + y^2 < r^2$

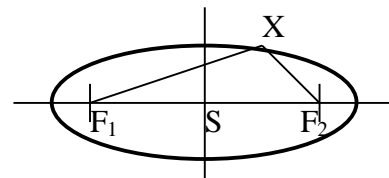
Obecná rovnice: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$a = -2m, \quad b = -2n, \quad c = m^2 + n^2 - r^2$



35.2 ELIPSA

Množina bodů, které mají od dvou daných pevných bodů (ohnisk) stálý součet vzdáleností, který se rovná $2a$ ($|F_1X| + |F_2X| = 2a$).



A, B – hlavní vrcholy

C, D – vedlejší vrcholy

S – střed

F_1, F_2 – ohniska

$a = |AS| = |CF|$ – hlavní poloosa

$2a = |AB|$ – hlavní osa

$a^2 = e^2 + b^2$

$b = |CS| = |DS|$ – vedlejší poloosa (vždy menší než hlavní poloosa)

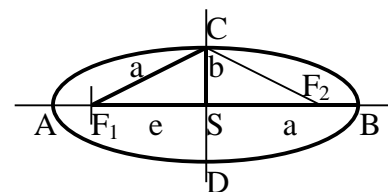
$2b = |CD|$ – vedlejší osa

$|SF_1| = |SF_2| = e$ – excentricita

Osová rovnice elipsy: Pro $2a \parallel O_x$: $\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$

Pro $2a \parallel O_y$: $\frac{(x - m)^2}{b^2} + \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1$

Obecná rovnice elipsy: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$



36 ANALYTICKÁ GEOMETRIE PARABOLY

Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od pevného bodu (ohniska) a dané přímky (řídící přímka), která daným bodem neprochází.

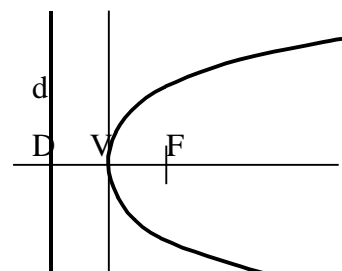
F – ohnisko

d – řídící přímka

V – vrchol

VF – osa paraboly

p – parametr: $\frac{p}{2} = |DV| = |FV|$



Vrcholová rovnice: $O \equiv O_x, F \in O^+$

$O \equiv O_x, F \in O^-$

$O \equiv O_y, F \in O^+$

$O \equiv O_y, F \in O^-$

$$(y - n)^2 = 2p(x - m)$$

$$(y - n)^2 = -2p(x - m)$$

$$(x - m)^2 = 2p(y - n)$$

$$(x - m)^2 = -2p(y - n)$$

inverzní kvadratická fce

graf kvadratické funkce

graf záporné kvadr. fce

37 ANALYTICKÁ GEOMETRIE HYPERBOLY

Množina všech bodů, které mají tu vlastnost, že absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od 2 daných pevných bodů (ohnisek) je konstantní ($||XF_1| - |XF_2|| = 2a$).

A, B – vrcholy paraboly

$|AB| = 2a$ – hlavní osa ($|AS| = a$)

b – vedlejší poloosa

F_1, F_2 – ohniska

e – excentricita = $|SF|$, $e^2 = a^2 + b^2$

nemusí platit $a > b$

Osová rovnice: Pro $2a \equiv O_x$: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

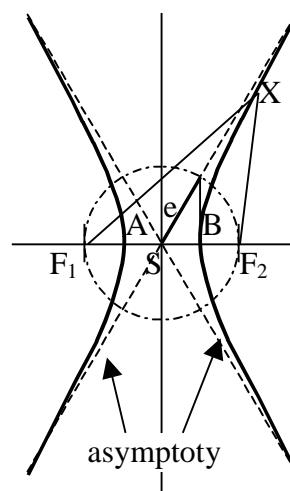
Pro $2a \equiv O_y$: $\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$

Obecná rovnice: $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Rovnice asymptot:

$y = \pm kx + q$ každá hyperbola má 2 asymptoty

$k = \operatorname{tg} \alpha$ pro $2a \equiv O_x$: $\frac{b}{a}$, pro $2a \equiv O_y$: $\frac{a}{b}$



Rovnoosá hyperbola: $a=b$

Větve leží v I. a III. kvadrantu: $xy = \frac{1}{2}a^2$ – graf lomené funkce

Větve leží v II. a IV. kvadrantu: $xy = -\frac{1}{2}a^2$ – graf záporné lomené fce

38 VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMKY A KUŽELOSEČKY

Počet průsečíků kuželosečky s přímkou:

kružnice a elipsa:

2 body **sečna**
1 bod **tečna**
0 bodů **vnější přímka**

parabola:

2 body **sečna**
1 bod
rovnoběžná s osou **protíná v 1 bodě**
protíná osu **tečna**
0 bodů **vnější přímka**

hyperbola:

2 body **sečna**
1 bod
rovnoběžná s asymptotou **protíná v 1 bodě**
protíná asymptotu **tečna**
0 bodů **vnější přímka**

38.1 TEČNA KUŽELOSEČKY V JEJÍM BODĚ

Bod dotyku: $[X_1, Y_1]$

Kružnice: $(x - m)(X_1 - m) + (y - n)(Y_1 - n) = r^2$

Elipsa: $\frac{(x - m)(X_1 - m)}{a^2} + \frac{(y - n)(Y_1 - n)}{b^2} = 1$

Parabola: $(y - n)(Y_1 - n) = p(x - m) + p(X_1 - m)$

Hyperbola: $\frac{(x - m)(X_1 - m)}{a^2} - \frac{(y - n)(Y_1 - n)}{b^2} = 1$

39 VARIACE A PERMUTACE

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ – faktoriál

Kombinatorické pravidlo součinu: počet všech uspořádaných dvojic, u nichž pro volbu prvního prvku máme n_1 možností a druhého n_2 možností, je roven součinu $n_1 n_2$.

Variace: $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$ je k -tice vytvořená z n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Záleží na pořadí ('123' \neq '321').

Permutace: $P(n) = n!$ je zvláštní případ variace, kdy se $k=n$.

Variace s opakováním: $V'_k(n) = n^k$ je k -tice vytvořená z n prvků tak, že každý se v ní může vyskytovat nejvýše k -krát.

Permutace s opakováním: $P'_{n_1, n_2, \dots, n_p}(n) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_p!}$, kde n_1 je počet prvků 1. druhu, n_2 2.

druhu a ... n_p p . druhu, přičemž platí, že $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$. Všechny prvky téhož druhu jsou stejné a žádné 2 prvky různých druhů nejsou stejné.

40 KOMBINACE

Kombinace: $C_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ je k -tice vytvořená z n prvků tak, že každý z prvků se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Nezáleží na pořadí ('123' ≡ '321'). Vztah mezi kombinacemi a variacemi:

$$C_k(n) = \frac{V_k(n)}{k!}$$

Kombinační číslo: $\binom{n}{k} = C_k(n)$

Kombinace s opakováním: $C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$ je k -tice vytvořená z n prvků tak, že každý prvek se v ní může opakovat maximálně k -krát.

40.1 VLASTNOSTI KOMBINAČNÍCH ČÍSEL

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

40.2 PASCALŮV TROJÚHELNÍK

$n=0$	$\binom{0}{0}$	1
$n=1$	$\binom{1}{0} \binom{1}{1}$	1 1
$n=2$	$\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}$	1 2 1
$n=3$	$\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$	1 3 3 1
$n=4$	$\binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}$	1 4 6 4 1

40.3 BINOMICKÁ VĚTA

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

k -tý člen binomického rozvoje: $c_k = \binom{n}{k-1} \cdot a^{n-k+1} \cdot b^{k-1}$

Pro výpočet mnohočlenu n -tého stupně.

Příklad: V mnohočlenu $\left(\frac{1}{3x} - x^3\right)^{11}$ vypočítej koeficient u x^{25} .

$$c \cdot x^{25} = \binom{11}{k-1} \cdot (3x)^{-(12-k)} \cdot (-x)^{3(k-1)}$$

$$c \cdot x^{25} = \binom{11}{k-1} \cdot 3^{k-12} \cdot x^{k-12} \cdot (-1)^{3k-3} \cdot x^{3k-3}$$

$$x^{25} = x^{4k-15} \Rightarrow k = 10$$

$$c = \binom{11}{9} \cdot 3^{-2} \cdot (-1)^{27} = -\frac{55}{9}$$

41 ZÁKLADY PRAVDĚPODOBNOTI

Náhodný pokus: ovlivněn náhodnými činiteli.

Náhodný jev: výsledek náhodného pokusu, o kterém můžeme rozhodnout zda je či není pravdivý.

Deterministický pokus: při dodržování daných podmínek vede vždy ke stejnému výsledku.

Pravděpodobnost náhodného jevu: $P(A) = \frac{m_A}{n}$, kde m_A je počet výsledků příznivých jevu A a n je počet všech možných výsledků daného pokusu.

Statistická definice pravděpodobnosti: $P(A) = \frac{n_A}{n}$, kde n_A je absolutní četnost a n je celkový počet (z n provedených pokusů je n_A příznivých).

Pravděpodobnost sjednocení jevů: jevy musejí být neslučitelné $A \cap B = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$A \cap A' = 0 \Rightarrow P(A \cup A') = 1 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$

Pravděpodobnost průniku jevů: Pokud jsou jevy A , B , C nezávislé, platí $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Binomická rozdělení: mějme n **nezávislých** pokusů, z nichž každý skončí buď zdarem s pravděpodobností p nebo nezdarem s pravděpodobností q , potom pravděpodobnost, že k jevů skončí zdárně vypočítáme: $P(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

42 ZÁKLADY STATISTIKY

Jednotka: každá musí být přesně určena místně, časově, věcně

Soubor: tvořen všemi jednotkami

Rozsah souboru: počet všech jednotek

Znak: vlastnosti, které u dané jednotky sledujeme (**kvalitativní** – odpovídáme slovně, **kvantitativní** – odpovídáme číslem)

Absolutní četnost: počet všech jednotek v souboru, u nichž byl daný jev zjištěn

Relativní četnost: $P(A) = \frac{n_A}{n}$

42.1 CHARAKTERISTIKY POLOHY

Aritmetický průměr: $\bar{x}_a = \frac{\sum x_i}{n}$

Vážený aritmetický průměr: $\bar{x}_a = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i}$

Modus \hat{x} : je střední hodnota, která odpovídá hodnotě údaje nejčastěji se vyskytujícího v daném souboru.

Medián \tilde{x} : hodnota prostředního členu **seřazeného** statistického souboru.

42.2 CHARAKTERISTIKY VARIABILITY

Průměrná odchylka: průměrná odchylka od průměru: $\bar{d} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$

Vážená průměrná odchylka: $\bar{d} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| \cdot n_i}{\sum n_i}$

Rozptyl: $\text{var } x = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$

Vážený rozptyl: $\text{var } x = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\sum n_i}$

Směrodatná odchylka: $\sigma = \sqrt{\text{var } x}$

43 ARITMETICKÁ POSLOUPNOST

43.1 POSLOUPNOST

Posloupnost je zobrazení všech přirozených čísel do množiny všech reálných čísel (**nekonečná** posloupnost reálných čísel) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Posloupnost je zobrazení prvních n přirozených čísel do \mathbb{R} (**konečná** posloupnost \mathbb{R}) $\{a_n\}_{n=1}^k = a_1, a_2, \dots, a_k$.

Posloupnost rostoucí: $r < s \Leftrightarrow a_r < a_s \quad r, s \in \mathbb{N}$

Posloupnost klesající: $r < s \Leftrightarrow a_r > a_s \quad r, s \in \mathbb{N}$

43.2 ARITMETICKÁ POSLOUPNOST

$a_{n+1} = a_n + d$, d diferenciál

$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ – jakýkoliv člen posloupnosti je aritmetickým průměrem členu předcházejícího a následujícího

N -tý člen posloupnosti: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Součet prvních n členů: $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

44 GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad q \neq 0$

$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

N -tý člen posloupnosti: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Součet prvních n členů: $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad q \neq 1$

44.1 VYUŽITÍ POSLOUPNOSTI

Úročitel: $r = 1 + p$, p přírůstek (%)

Pravidelný růst: $a_n = ar^n$, a počátek

Růst s příspěvkem: $a_n = ar^n + b \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$, b příspěvky

Jednoduché úrokování (vkládáme po měsíci): $a_n = n \cdot a + a \cdot p \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{n(1+n)}{2}$

Složité úrokování (roční): $a_n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$

45 ŘADY

Nekonečná geometrická řada: geometrická posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Součet geometrické řady: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}$ $|q| < 1$, existuje-li tato limita je **konvergentní**, jinak je **divergentní**.

46 LIMITA, SPOJITOST A DERIVACE FUNKCE

46.1 LIMITA

Limita posloupnosti: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konečnou (vlastní) limitu a právě tehdy, když ke každému libovolně zvolenému kladnému ε existuje číslo n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Zápis: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ $a \in \mathbb{R}$. Je-li konečné číslo reálné, tedy jedná se o vlastní limitu, je posloupnost **konvergentní**. Nemá-li konečnou limitu je **divergentní**.

Limita funkce: Funkce f má v bodě a limitu L , jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu L existuje okolí bodu a takové $\forall x \in U(a) - \{a\}; f(x) \in U(L)$. Zápis: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Limita zleva: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1$, **zprava:** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$

Nevlastní limita: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$

Limita v nevlastním bodě: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Věty o limitách: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{konst.} \cdot a_n) = \text{konst.} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{kx} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Neurčitě výroky: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, \infty - \infty$

46.2 SPOJITOST FUNKCE

Okolí bodu: $(a - \delta, a + \delta)$ $\delta > 0$ nebo $|x - a| < \delta$, zápis $U(a, \delta)$

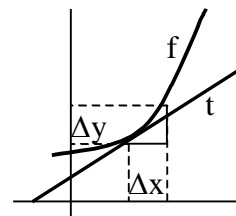
Levé okolí bodu: $(a - \delta, a)$ $\delta > 0$

Funkce f je spojitá v bodě a , jestliže k libovolně zvolenému okolí $f(a)$ existuje okolí bodu a takové, že $\forall x \in U(a); f(x) \in U(f(a))$.

Funkce f je spojitá v intervalu (a, b) , je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Funkce f je spojitá na $\langle a, b \rangle$, je-li spojitá na (a, b) a v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Funkce f je spojitá v bodě a , má-li v tomto bodě limitu.



46.3 DERIVACE FUNKCE

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$

y' ... 1. derivace

y'' ... 2. derivace

$y^{(6)}$... 6. derivace

Jestliže má funkce f v bodě x_0 derivaci je v bodě x_0 spojitá. Obrácená věta neplatí

Funkce f má derivaci v $\langle a, b \rangle$, má-li derivaci v každém bodě (a, b) , v bodě a má derivaci zprava a v bodě b zleva.

Je-li funkce f definována v nějakém okolí bodu x_0 a existuje-li $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, má funkce f

v bodě x_0 derivaci zleva. (Obdobně platí pro derivaci zprava).

Derivace: $c' = 0$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

goniometrické fce: $(\sin x)' = \cos x$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \quad x \in \mathbb{R} - \{k\pi\}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

s konstantou: $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

sčítání: $(u \pm v)' = u' \pm v'$

násobení: $(uvz)' = u'vz + uv'z + uvz'$

dělení: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

složená fce: $(f[g(x)])' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

exponenciální fce: $(e^x)' = e^x$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

logaritmické fce: $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad x > 0$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad x > 0, a > 0, a \neq 1$$

implicitní funkce: $y = x^{\sin x}$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot y$$

$$y' = \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot x^{\sin x}$$

vyšší derivace: $y'' = (y')'$

Derivujeme tak, že členy obsahující x derivujeme normálně a členy obsahující y derivujeme podle y a násobíme y' .

47 GEOMETRICKÝ A FYZIKÁLNÍ VÝZNAM DERIVACE

Fyzikální: derivace dráhy podle času je okamžitá rychlost, 2. derivace dráhy podle času je okamžitá zrychlení

Geometrický: 1. derivace funkce v bodě dotyku je směrnice tečny $y'(x_0) = k_t$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$k_t k_n = -1$$

48 VYŠETŘOVÁNÍ PRŮBĚHU FUNKCE

48.1 MONOTONNOST FUNKCE

Rostoucí: jestliže je v každém bodě intervalu první derivace kladná ($f'(x) > 0$)

Klesající: je-li v každém bodě 1. derivace záporná ($f'(x) < 0$)

Příklad: $y = x^3 - 3x$

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$\text{rostoucí:} \quad 3x^2 - 3 > 0 \Rightarrow (-\infty, -1), (1, +\infty)$$

$$\text{klesající:} \quad 3x^2 - 3 < 0 \Rightarrow (-1, 1)$$

48.2 EXTRÉMY FUNKCE

Funkce má v x_0 maximum právě tehdy, existuje-li okolí bodu x_0 takové, že pro každé x náležející do tohoto okolí platí, že funkční hodnota je menší nebo rovna funkční hodnotě funkce v x_0 . obdobně platí i pro minimum funkce.

Stacionární body: $f'(x) = 0$ – v těchto bodech má funkce lokální minimum (pokud je $f''(x) > 0$) nebo maximum ($f''(x) < 0$). Pokud je druhá derivace ve stacionárním bodě rovna nule, nejedná se o extrém.

Inflexní bod: $f'(x) = 0$ – nelze udělat tečnu, funkce konkávní přechází na konvexní.

konkávní funkce: $f'(x) < 0$ – celý graf leží pod tečnou

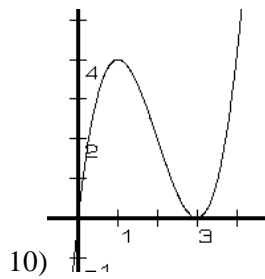
konvexní funkce: $f'(x) > 0$ – celý graf leží nad tečnou

48.3 VYŠETŘENÍ PRŮBĚHU FUNKCE

- 1) Určit definiční obor funkce
funkce sudá, lichá, periodická
 - 2) Body, v nichž není definována, ale má v nich limitu zprava a zleva
Limita v nevlastních bodech
 - 3) Průsečíky s osami x, y
Znaménka funkčních hodnot
 - 4) Výpočet I. derivace
Nulové body I. derivace – stacionární body
Body, v nichž není derivace definována
 - 5) Intervaly monotónnosti
 - 6) Výpočet II. derivace
Nulové body II. derivace – inflexní body
Body, v nichž není derivace definována
 - 7) Lokální extrém
Intervaly konvexnosti a konkávnosti
 - 8) Asymptoty
 $y = ax + b$
$$a = k_{as} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$$
 - 9) Obor hodnot funkce
 - 10) Graf funkce
-

Příklad: $f : y = x^3 - 6x^2 + 9x$

- 1) $D = \mathbb{R}$
 $f(-x) = -x^3 - 6x^2 - 9x = -(x^3 + 6x^2 + 9x)$ – ani sudá, ani lichá
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right) = -\infty$
- 3) průsečík s x : $y = 0$
 $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$
 $x = 0 \vee x = 3$ $[0,0], [3,0]$
průsečík s y : $x = 0$
 $y = 0$
 $[0,0]$
- 4) $y' = 3x^2 - 12x + 9$
stacionární body: $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$
- 5) rostoucí: $y' > 0 \Rightarrow (-\infty, 1), (3, +\infty)$ klesající: $y' < 0 \Rightarrow (1, 3)$
- 6) $y'' = 6x - 12$
inflexní body: $y'' = 0 \Rightarrow x = 2$
- 7) $y''_{(1)} = -6$ – lokální maximum $[1, 4]$ $y''_{(3)} = 6$ – lokální minimum $[3, 0]$
konvexní: $y'' > 0 \Rightarrow (2, +\infty)$ konkávní: $y'' < 0 \Rightarrow (-\infty, 2)$
- 8) $k_{as} = \lim_{x \rightarrow \infty} b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty$
- 9) $H = \mathbb{R}$



48.4 GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

Příklad: Do koule o poloměru R vepište válec největšího objemu.

$$V = \pi r^2 v$$

$$r^2 + v^2 = 4R^2 \Rightarrow r^2 = 4R^2 - v^2$$

$$V = \pi(4R^2 - v^2)v$$

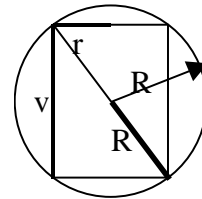
$$V' = 4\pi R^2 - 3\pi v^2$$

$$4\pi R^2 - 3\pi v^2 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot R$$

$$r^2 = 4R^2 - v^2 \Rightarrow r = \sqrt{4R^2 - \frac{4}{3}R^2} = R\sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$V'' = -6\pi v$$

$$V''\left(R\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\pi R\sqrt{48} < 0 \Rightarrow v \text{ tomto bodě je maximum funkce}$$



49 PRIMITIVNÍ FUNKCE, URČITÝ INTEGRÁL

49.1 DIFERENCIÁLNÍ FUNKCE

dx – diferenciál argumentu

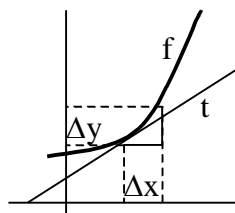
dy – diferenciál funkce

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$

Výpočet absolutních chyb: dy

Výpočet relativních chyb: $\frac{dy}{y}$



Příklad: Válec má průměr i výšku $80 \pm 0,5$ cm. Jaká bude relativní chyba při výpočtu objemu?

$$D=80, \quad dD = \pm 0,5$$

$$V = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot D = \frac{\pi D^3}{4}$$

$$dV = \frac{\pi}{4} 3D^2 \cdot dD$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{3dD}{D} = \frac{1,5}{80} = 1,87\%$$

49.2 NEURČITÝ INTEGRÁL

Primitivní funkce: $F'(x) = f(x)$, $F(x)$ je funkce primitivní k $f(x)$

Neurčitý integrál: $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$, kde $\int f(x) \cdot dx$ je neurčitý integrál, $f(x) \cdot dx$ je integrant a $F(x) + C$ je primitivní funkce. Integrál je opak derivace.

49.3 ZÁKLADNÍ INTEGRÁLY

$$\int 0 \cdot dx = C$$

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + C$$

$$\int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int c \cdot dx = c \cdot \int dx = cx + C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int e^x \cdot dx = e^x + C$$

$$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \arctg x + C = -\operatorname{arccotg} x + C$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx \pm \int g(x) \cdot dx + C$$

$$\int c \cdot f(x) \cdot dx = c \cdot \int f(x) \cdot dx$$

49.4 INTEGRAČNÍ METODY

Substituční metody:

$$\int f(ax+b) \cdot dx = \frac{1}{a} \int f(t) \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C$$

$$t = ax + b$$

$$dt = t' \cdot dx = a \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{a}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \int \frac{1}{t} \cdot dt = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C$$

$$t = f(x)$$

$$dt = f'(x) \cdot dx$$

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x) \cdot dx = \int f(t) \cdot dt = F[g(x)] + C$$

$$t = g(x)$$

$$dt = g'(x) \cdot dx$$

Metoda per partes: (po částech)

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int (uv)' \cdot dx = \int u'v \cdot dx + \int uv' \cdot dx$$

$$uv = \int u'v \cdot dx + \int uv' \cdot dx$$

$$\int u'v \cdot dx = uv - \int uv' \cdot dx$$

Příklad:
$$\int x \cdot \cos x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u' = \cos x \\ v = x \end{array} \right| \begin{array}{l} u = \sin x \\ v' = 1 \end{array} = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 1 \cdot dx =$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x + C$$

Příklad:
$$\int \ln x \cdot dx = \int 1 \cdot \ln x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u' = 1 \\ v = \ln x \end{array} \right| \begin{array}{l} u = x \\ v' = \frac{1}{x} \end{array} = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= x \cdot \ln x - x + C$$

Příklad:
$$\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u' = e^x \\ v = \sin x \end{array} \right| \begin{array}{l} u = e^x \\ v' = \cos x \end{array} = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \cdot dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u' = e^x \\ v = \cos x \end{array} \right| \begin{array}{l} u = e^x \\ v' = -\sin x \end{array} = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x \cdot dx$$

$$\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \sin x \cdot dx$$

$$\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = \frac{e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x}{2} + C$$

49.5 VÝPOČET URČITÉHO INTEGRÁLU

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Funkce $f(x)$ musí být v intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitá.

$$\forall c \in \langle a, b \rangle; a < c < b \Rightarrow \int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = - \int_b^a f(x) \cdot dx$$

Při **substituci** musíme přepočítat meze pro t :

$$\text{Příklad: } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \cdot dx \end{array} \right. \begin{array}{l} t_1 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ t_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} = \int_{\frac{1}{2}}^1 t^2 \cdot dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{7}{24}$$

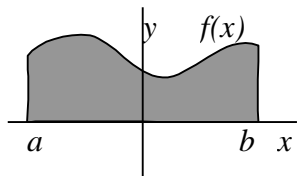
Při metodě **per partes**:

$$\text{Příklad: } \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u' = \sin x \\ v = x \end{array} \right. \begin{array}{l} u = -\cos x \\ v' = 1 \end{array} = [-x \cdot \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \cdot dx =$$

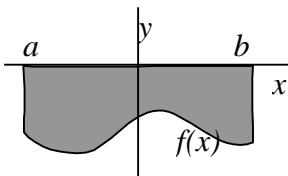
$$= [-x \cdot \cos x + \sin x]_0^{\pi} = \pi$$

50 UŽITÍ INTEGRÁLNÍHO POČTU K VÝPOČTU OBSAHŮ ROVINNÝCH OBRAZCŮ A OBJEMŮ ROTAČNÍCH TĚLES

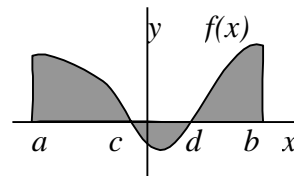
50.1 OBSAH OBRAZCE



$$S = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

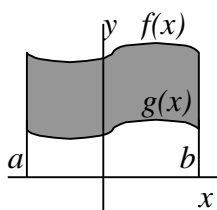
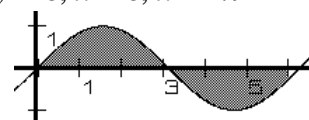


$$S = -\int_a^b f(x) \cdot dx \quad S = \int_a^c f(x) \cdot dx - \int_c^d f(x) \cdot dx + \int_d^b f(x) \cdot dx$$



Příklad: Vypočti obsah obrazce vymezeného křivkami: $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$

$$S = \int_0^{\pi} \sin x - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x = [-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 4$$



Pro plochu obrazce vymezeného **dvěma křivkami** platí vztah:
 $S = \int_a^b [f(x) - g(x)] \cdot dx$, tento vzorec platí i v případě, že část plochy leží pod osou x .

Příklad: $f : y = 2 - x^2$, $g : y = x$
 $2 - x^2 = x \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1$

$$S = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) \cdot dx = 4,5$$

Příklad: $f : y^2 = 4x$, $p : 2x - y - 4 = 0$

1) Derivujeme podle x

$$f : y = \pm 2\sqrt{x}, p : y = 2x - 4$$

Průsečíky: $y^2 = 4x \Rightarrow 4x^2 - 16x + 16 = 4x \Rightarrow x = 1 \vee x = 4$

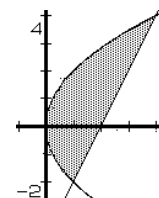
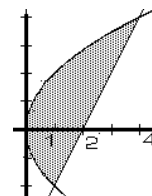
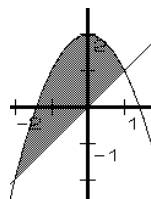
$$S = 2 \int_0^1 2x^{\frac{1}{2}} \cdot dx + \int_1^4 (2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 4) \cdot dx = 9$$

2) Derivujeme podle y

$$f : x = \frac{y^2}{4}, p : x = 2 + \frac{y}{2}$$

Průsečíky: $x = x \Rightarrow \frac{y^2}{4} = 2 + \frac{y}{2} \Rightarrow y = -2 \vee y = 4$

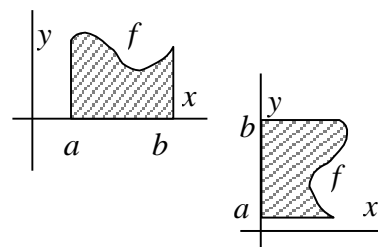
$$S = \int_{-2}^4 \left(2 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4} \right) \cdot dy = 9$$



50.2 OBJEMY ROTAČNÍCH TĚLES

Pro tělesa rotovaná kolem osy x : $V = \pi \int_a^b f^2(x) \cdot dx = \pi \int_a^b y^2 \cdot dx$

Pro tělesa rotovaná kolem osy y : $V = \pi \int_a^b f^2(y) \cdot dy = \pi \int_a^b x^2 \cdot dy$



Příklad: Vypočti objem kulové úseče o výšce v , která je částí koule o poloměru r .

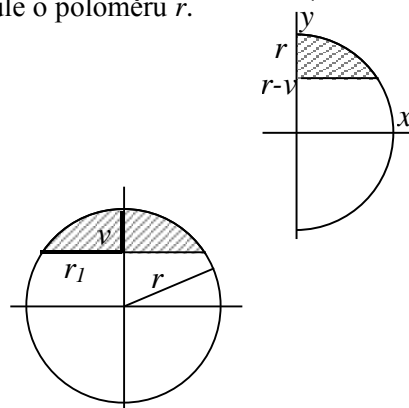
Kružnice: $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2$

$$V = \pi \int_{r-v}^r (r^2 - x^2) \cdot dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{r-v}^r = \pi r v^2 - \pi \frac{v^3}{3}$$

Vzorec pro objem kulové úseče: $V = \pi r_1^2 \cdot \frac{v}{2} + \frac{4}{3} \pi \left(\frac{v}{2}\right)^3$, kde

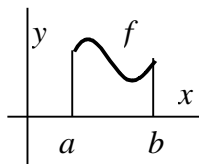
$r_1 = \sqrt{r^2 - (r-v)^2}$. Po dosazení a úpravách:

$$V = \pi r v^2 - \pi \frac{v^3}{3}$$



50.3 DÉLKA OBLOUKU ROVINNÉ KŘIVKY

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$



Příklad: Vypočti obvod kruhu o poloměru r .

kruh: $y^2 + x^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

$$\begin{aligned} s &= 4 \cdot \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx = 4r \cdot \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = 4 \cdot \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} \cdot dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} t = \frac{x}{r} & t_1 = 1 \\ dt = \frac{1}{r} \cdot dx & t_2 = 0 \end{array} \right| = 4r \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dx = 4r \cdot [\arcsin t]_0^1 = 2\pi r \end{aligned}$$

©1999 Petr Řezka
rezin@email.cz

Nekomerční využití pro studijní potřeby povoleno v plném rozsahu.